# Аналогия логарифмической функции для натуральных чисел

Георгий Гуляев

18 ноября 2023 г.

## Определение и теоремы

Введем функцию $l(n), n \in \mathbb{N}$ при помощи следующих трех равенств:

1. $l(1) = 0$,
2. $l(p) = p$, если $p$ - простое число,
3. $l(m \cdot n) = l(m) + l(n)$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1**. $l(n^m) = m \cdot l(n)$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$.

**Доказательство**. При $m = 1$ утверждение теоремы очевидно. Если $m > 1$, то, согласно третьему равенству определения, $l(n^m) = l(n \cdot n^{m-1}) = l(n) + l(n^{m-1})$. Если $m > 2$, то продолжим $l(n^{m-1}) = l(n) + l(n^{m-2})$, и так далее. В результате получим ровно m слагаемых $l(n)$. Что и требовалось доказать.

Полагая $n = p$, где p - простое и, используя равенство 2 определения, получаем следствие теоремы 1.

**Следствие 1**. $l(p^m) = m \cdot p$ для простого $p$ и $m \in \mathbb{N}$.

В том случае, когда оба $n$ и $m$ - простые, то есть $n = p, m = q$, согласно следствию 1 имеем $l(p^q) = p \cdot q$ и $l(q^p) = p \cdot q$, поэтому верно второе следствие.

**Следствие 2**. $l(p^q) = l(q^p)$ для любых простых $p$ и $q$.

Пусть $n > 1$ натуральное число, тогда его можно представить единственным способом в виде канонического разложения на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \tag{1}$$

где $p_1, ..., p_k$ - различные простые, $\alpha_1, ..., \alpha_k$ - натуральные числа.

**Теорема 2**. $l(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}) = p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + ... + p_k \cdot \alpha_k$.

**Доказательство**. Используя третье свойство определения, произведение преобразуем в сумму и, далее, применяем следствие 1.

$$l(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}) = l(p_1^{\alpha_1}) + l(p_2^{\alpha_2}) + ... + l(p_k^{\alpha_k}) = p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + ... + p_k \cdot \alpha_k$$

Таким образом, определенная нами функция $l(n)$ преобразует степени в произведения, а произведения в суммы. В этом смысле она похожа на обычную логарифмическую функцию. Однако есть и существенное различие. Для нее не существует аналога основного свойства обычного логарифма, вытекающего из его определения:

$$a^{log_a b} = b.$$

**Теорема 3**. Не существует таких натуральных $a$ и $b$, чтобы выполнялось равенство:

$$a^{l(b)} = b. \tag{2}$$

**Доказательство**. Предположим, что равенство (2) выполняется для некоторых натуральных $a$ и $b$, Тогда, применяя функцию $l(n)$ к обеим частям, получим

$$l(a^{l(b)}) = l(b) \Rightarrow l(a) \cdot l(b)) = l(b) \Rightarrow l(a) = 1$$

Последнее равенство невозможно, так как $l(1) = 0$ а, из теоремы 2, $l(n) > 1$ при $n > 1$. Что и требовалось доказать.

Функция $l(n)$ - не взаимно однозначная. Как правило, для заданного числа $m > 1, m \in \mathbb{N}$, существует много значений $n \in \mathbb{N}$, для которых $l(n) = m$. Например,

```
m = 2, n = 2
m = 3, n = 3
m = 4, n = 4
m = 5, n = 5, 6
m = 6, n = 8, 9
m = 7, n = 7, 10, 12
m = 8, n = 15, 16, 18
m = 9, n = 14, 20, 24, 27
m = 10, n = 21, 25, 30, 32, 36
m = 11, n = 11, 28, 40, 45, 48, 54
m = 12, n = 35, 42, 50, 60, 64, 72, 81
m = 13, n = 13, 22, 56, 63, 75, 80, 90, 96, 108
m = 14, n = 33, 49, 70, 84, 100, 120, 128, 135, 144, 162
m = 15, n = 26,44,105,112,125,126,150,160,180,192,216,243
m = 16, n = 39,55,66,98,140,168,189,200,225,240,256,270,288,324
```

**Теорема 4**. Множество $\{n\}$ решений уравнения $l(n) = m$ для любого заданного числа $m > 1, m \in \mathbb{N}$ - конечно.

**Доказательство**. Пусть n представлено разложением (1). Тогда, по теореме 2, уравнение $l(n) = m$ сводится к уравнению

$$p_1 \cdot \alpha_1 + p_2 \cdot \alpha_2 + ... + p_k \cdot \alpha_k = m \qquad (3)$$

То есть, перебирая все решения уравнения (3), мы получим все решения n вида (1) для уравнения $l(n) = m$. Очевидно, простые числа $p_1, p_2, ..., p_k$ в (3) не могут быть больше m, поэтому мы имеем конечное число простых чисел и, следовательно, конечное число решений уравнения (3) для любого фиксированного натурального m $>$ 1.

Для удобства обозначим через $L_m$ - множество решений $\{n\}$ уравнения $l(n) = m$ для $m > 1, m \in \mathbb{N}$.

**Теорема 5**. Множества $L_m$ для различных $m$ не пересекаются между собой.

**Доказательство**. Предположим противное,что существуют два различных значения $m = r$ и $m = s$, для которых $L_r$ и $L_s$ имеют общий элемент $n$.Тогда $l(n) = r$ и $l(n) = s$, то есть $r = s$. Что и требовалось доказать.

**Теорема 6**. Множества $L_m$ содержат все натуральные числа $n > 1$, то есть для любого $n > 1, n \in \mathbb{N}$ существует m (единственное по теореме 5) такое, что $l(n) = m$.

**Доказательство**. Пусть $n > 1$ - произвольное натуральное число. Его можно предствить в виде (1) и по формуле (3) вычислить $m \in \mathbb{N}$. Что и требовалось доказать.

Теоремы 5 и 6 говорят о том, что условие $l(x) = l(y)$ задает отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ и, следовательно, разбивает это множество на непересекающиеся классы эквивалентности $L_m$.

В полученном фактормножестве $\{L_m\}$ казалось бы естественным образом можно определить операцию умножения:

$$L_r \cdot L_s = L_{r+s}$$

поскольку все произведения вида $a \cdot b, a \in L_r, b \in L_s$ находятся в $L_{r+s}$. Однако, вообще говоря, они не исчерпывают $L_{r+s}$, там могут быть и другие элементы. Это хорошо видно на примере.

Пусть $r = 7, s = 8, r + s = 15, L_7 = \{7, 10, 12\}, L_8 = \{15, 16, 18\}$. Тогда

$$L_7 \cdot L_8 = \{105, 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216\}$$

Однако $L_{7+8} = L_{15} = \{26, 44, 105, 112, 125, 126, 150, 160, 180, 192, 216, 243\}$ содержит три дополнительных элемента $26, 44, 243$, которые получаются из других классов, предсталяющих число 15 в виде суммы $L_{2+13}, L_{3+12}, \ldots$.

## Задачи

**Задача 1**. Для заданного $n > 1, n \in \mathbb{N}$ пусть $l(n) = m$. Найти минимальное и максимальное значения во множестве $L_m$. Например, найти минимальное и максимальное значение $n$, для которого $l(n) = l(2023), l(n) = l(2024)$ и так далее.

**Задача 2**. Пусть $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ такие, что $l(b)$ делится на $l(a)$: $l(b) = k \cdot l(a)$. Докажите, что, если при этом $k + 1 = p$ простое, то $b - 1$ делится на $p$.