Генерация циклов обобщенной функцией Коллаца

Георгий Гуляев

20 января 2026 г.

1. Введение

Рассмотрим последовательности, связанные с так называемой гипотезой Коллаца [1,2].

Начинаем последовательность с некоторого натурального a_1. Каждый следующий a_{n+1} член последовательности получаем из предыдущего a_n при помощи алгоритма:

1. Если число a_n нечетное, то делаем его четным: $a_n = 3a_n + 1$, а если оно уже четное, то пункт 1 пропускаем и переходим к пункту 2.

2. С результатом пункта 1 повторяем операцию деления на 2 до тех пор, пока число не станет нечетным. Это и будет a_{n+1}.

Например, для $a_1 = 7$, получаем

$$7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, ... \tag{1}$$

Недоказанная до настоящего времени гипотеза Коллаца заключается в предположении, что для любого натурального a_1 подобная последовательность завершится единицами.

Оригинальная функция Коллаца выглядит так:

$$C(n) = \begin{cases} 3n + 1, \text{если n нечетно} \\ \frac{n}{2}, \text{если n четно} \end{cases} \tag{2}$$

Если использовать ее, то в порождаемой последовательности будет много дополнительных членов, например, для того же случая $a_1 = 7$ последовательность (1) примет вид:

$$7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...$$

В данном случае все завершается бесконечно повторяющимся циклом $< 4, 2, 1 >$. Эти добавленные четные числа не несут полезной информации, так как в функции (2) фактически речь идет об "удалении"четности из натуральных чисел.

Для натурального $n > 1$ и простого p определим через $r(n, p)$ операцию удаления из разложения на простые множители числа n всех сомножителей равных p.

То есть, если n содержит в своем разложении на простые множители сомножитель p^α, где $\alpha \geq 0$ - максимальная степень для множителей p, то

$$r(n, p) = \frac{n}{p^\alpha}$$

С учетом этого определения, используемая нами функция вместо функции Коллаца $C(n)$ в вышеприведенном алгоритме из двух пунктов может быть формально определена так:

$$\tilde{C}(n) = \begin{cases} r(3n + 1, 2), \text{если } n \equiv 1 (\text{mod } 2) \\ r(n, 2), \text{если } n \equiv 0 (\text{mod } 2) \end{cases} \tag{3}$$

В данной работе мы пойдем дальше и будем исследовать поведение функции более общего вида:

$$T(n) = \begin{cases} r(an + b, p), \text{если } n \not\equiv 0 (\text{mod p}) \\ r(n, p), \text{если } n \equiv 0 (\text{mod p}) \end{cases} \tag{4}$$

Здесь предполагается, что p - простое число, n и a - натуральные, b - целое. Функцию (4) можно записать еще проще, если рассматривать ее только на множестве натуральных чисел не делящихся на p:

$$T(n) = r(an + b, p) \tag{5}$$

где p - простое, $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \not\equiv 0 (\text{mod p})$. Функция (5) будет нам интересна с точки зрения циклов, которые она порождает.

2. Случай $a = 3, p = 2$

Подобное обобщение функции Коллаца рассматривалось в работе [3]. Если b = 1, то, в предположении, что гипотеза Коллаца верна, единственным циклом будет $< 1 >$.

А вот для b = -1, конструируя последовательности при помощи функции (5), можно обнаружить уже 3 цикла:

```
<1>
<5, 7>
<17, 25, 37, 55, 41, 61, 91>
```

Циклы определяются с точностью до круговых перестановок, например, $<$17, 25, 37, 55, 41, 61, 91$>$ и $<$91, 17, 25, 37, 55, 41, 61$>$ это один и тот же цикл. Строго говоря, циклом мы называем элемент фактормножества по отношению эквивалентности "круговая перестановка".

Будем задавать этот элемент представителем с наименьшим первым элементом. Это корректно, так как, очевидно, в цикле не может быть одинаковых элементов.

Написав несложные функции на языке программирования Julia, мы сможем находить циклы для любых b.

```
function next(n,a,b,p)
  if n%p!=0 n=a*n+b end
  if n>0 while n%p==0 n=div(n,p) end end
  n
end

function seq(n,a,b,p)
  l = [n]
  m = next(n,a,b,p)
  while !(m in l)
    push!(l,m)
    m = next(m,a,b,p)
  end
  l
end
```

```
function fix(a)
  per(a) = vcat(a[end],a[1:end-1])
  m = minimum(a)
  while a[1]!=m a=per(a) end
  a
end

function find(d,a,b,p)
  list = Vector{Vector{}}()
  for k in d
    l=seq(k,a,b,p)
    n=next(l[end],a,b,p)
    cycle=fix(l[findfirst(x -> x==n,l):end])
    if !(cycle in list) push!(list,cycle) end
  end
  list
end
```

Для того чтобы не получить последовательность расходящуюся к бесконечности нужно выбирать b не делящиеся на p, то есть, в случае $p = 2$, b должно быть нечетным.

В соответствии с условиями функции (5) n также должно быть нечетным при $p = 2$. Приведем пример расходящейся последовательности, например, для $b = 2$:

$$5, 17, 161.485, 1457, 4373, 13121, ...$$

Здесь 3n+2 при нечетных n дает только нечетные числа, нет сокращения на 2 и последовательность неограниченно растет.

В качестве параметра d в функции $find$ выбираем диапазон поиска начальных чисел n, например, все нечетные от 3 до $10^8 - 1$. Пример выполнения программы для $b = 5$ и $b = 13$.

```
julia> find(3:2:10^8,3,5,2)
6-element Vector{Vector}:
 [19, 31, 49]
 [5]
 [1]
 [23, 37, 29]
 [187, 283, 427, 643, 967, 1453, 1091, 1639, 2461, 1847, 2773, 2081, 781, 587, 883, 1327, 1993]
 [347, 523, 787, 1183, 1777, 667, 1003, 1507, 2263, 3397, 2549, 1913, 359, 541, 407, 613, 461]

julia> find(3:2:10^8,3,13,2)
10-element Vector{Vector}:
 [1]
 [13]
 [131, 203, 311, 473, 179, 275, 419, 635, 959, 1445, 1087, 1637, 1231, 1853, 1393]
 [211, 323, 491, 743, 1121]
 [259, 395, 599, 905, 341]
 [227, 347, 527, 797, 601]
 [287, 437, 331, 503, 761]
 [251, 383, 581, 439, 665]
 [283, 431, 653, 493, 373]
 [319, 485, 367, 557, 421]
```

Разумеется, здесь мы не можем утверждать, что нашли все возможные циклы для $b = 5$ и $b = 13$, так как поиск был ограничен условием $n < 10^8$.

3. Общая теорема генерации циклов

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, ..., n\}$ - множество из n не обязательно различных натуральных чисел. Через $S_m(A)$ обозначим частичную сумму первых m элементов множества A:

$$S_m(A) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Рассмотрим все круговые перестановки множества A:

$$A_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, A_2 = \{a_2, ..., a_n, a_1\}, ..., A_n = \{a_n, a_1, ..., a_{n-1}\}$$

Обозначим через $S_{k,m} = S_m(A_k), k \in \{1, 2, ..., n\}, m \in \{1, 2, ..., n\}$. Будем также считать $S_{k,0} = 0$ для всех $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Теорема. Пусть p - простое число, $a > 1$ - натуральное не делящееся на p, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, ..., n\}$. Тогда для

$$b = p^{a_1+a_2+...+a_n} - a^n \tag{6}$$

множество $< x_1, x_2, ..., x_n >$, где

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p^{S_{k,n-i}} \cdot a^{i-1}, k \in \{1, 2, ..., n\} \tag{7}$$

образует цикл по отношению к функции (5).

Доказательство. Нам нужно доказать, что функция (5) преобразует каждый элемент множества $< x_1, x_2, ..., x_n >$ в следующий за ним по кругу, то есть

$$T(x_1) = x_2, T(x_2) = x_3, ..., T(x_n) = x_1$$

Достаточно проверить только два равенства $T(x_1) = x_2$ и $T(x_n) = x_1$, поскольку при выборе любого $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ и проверке равенства $T(x_i) = x_{i+1}$ во множестве A_i можно переобозначить индексы по порядку так, что $A_i = B_1 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ и $A_{i+1} = B_2 = \{b_n, b_1, ..., b_{n-1}\}$.

Итак,

$$T(x_1) = r(a \cdot x_1 + b) = r(a \cdot \sum_{i=1}^{n} p^{S_{1,n-i}} \cdot a^{i-1} + p^{a_1+a_2+...+a_n} - a^n) =$$

$$r(\sum_{i=1}^{n} p^{S_{1,n-i}} \cdot a^i + p^{a_1+a_2+...+a_n} - a^n) = r(\sum_{i=1}^{n-1} p^{S_{1,n-i}} \cdot a^i + a^n + p^{a_1+a_2+...+a_n} - a^n) =$$

$$r(\sum_{i=1}^{n-1} p^{S_{1,n-i}} \cdot a^i + p^{a_1+a_2+...+a_n}) = r(\sum_{i=1}^{n-1} p^{a_1+a_2+...+a_{n-i}} \cdot a^i + p^{a_1+a_2+...+a_n}) =$$

$$r(p^{a_1} \cdot (\sum_{i=1}^{n-2} p^{a_2+...+a_{n-i}} \cdot a^i + a^{n-1} + p^{a_2+...+a_n})) = r(p^{a_1} \cdot (\sum_{i=1}^{n-1} p^{a_2+...+a_{n-i}} \cdot a^{i-1} + a^{n-1})) =$$

$$r(p^{a_1} \cdot (\sum_{i=1}^{n} p^{S_{2,n-i}} \cdot a^{i-1})) = r(p^{a_1} \cdot x_2) = x_2$$

Аналогично,

$$T(x_n) = r(a \cdot x_n + b) = r(a \cdot \sum_{i=1}^{n} p^{S_{n,n-i}} \cdot a^{i-1} + p^{a_1+a_2+\ldots+a_n} - a^n) =$$

$$r(\sum_{i=1}^{n} p^{S_{n,n-i}} \cdot a^i + p^{a_1+a_2+\ldots+a_n} - a^n) = r(\sum_{i=1}^{n-1} p^{S_{n,n-i}} \cdot a^i + a^n + p^{a_1+a_2+\ldots+a_n} - a^n) =$$

$$r(\sum_{i=1}^{n-1} p^{S_{n,n-i}} \cdot a^i + p^{a_1+a_2+\ldots+a_n}) = r(\sum_{i=1}^{n-1} p^{a_n+a_1+\ldots+a_{n-i-1}} \cdot a^i + p^{a_1+a_2+\ldots+a_n}) =$$

$$r(p^{a_n} \cdot (\sum_{i=1}^{n-2} p^{a_1+\ldots+a_{n-i-1}} \cdot a^i + a^{n-1} + p^{a_1+\ldots+a_{n-1}})) = r(p^{a_1} \cdot (\sum_{i=1}^{n-1} p^{a_1+\ldots+a_{n-i}} \cdot a^{i-1} + a^{n-1})) =$$

$$r(p^{a_1} \cdot (\sum_{i=1}^{n} p^{S_{1,n-i}} \cdot a^{i-1})) = r(p^{a_1} \cdot x_1) = x_1$$

Что и требовалось доказать.

В качестве иллюстрации сформулируем два частных случая теоремы для $n = 2$ и $n = 3$.

Следствие 1. Пусть m и n - любые натуральные числа, p - простое число, $a > 1$ - натуральное не делящееся на p. Вычислим:

$$b = p^{m+n} - a^2, x = p^m + a, y = p^n + a$$

Тогда $< x, y >$ образует цикл из двух чисел по отношению к функции (5), то есть функция (5) x переводит в y, а y переводит в x.

Следствие 2. Пусть m, n и k - любые натуральные числа, p - простое число, $a > 1$ - натуральное не делящееся на p. Вычислим:

$$\begin{cases} b = p^{m+n+k} - a^3 \\ x = p^{m+n} + a \cdot p^m + a^2 \\ y = p^{n+k} + a \cdot p^n + a^2 \\ z = p^{k+m} + a \cdot p^k + a^2 \end{cases}$$

Тогда $< x, y, z >$ образует цикл из трех чисел для функции (5).

Поясним смысл доказанной теоремы на простом примере приведенного ранее цикла <17, 25, 37, 55, 41, 61, 91>. Здесь $p = 2, a = 3, b = -1$. На каждом шаге перехода к следующему элементу от предыдущего при помощи функции (5) мы выполняем операцию деления на $2^{a_1}, 2^{a_2}, ..., 2^{a_7}$.

$17 \cdot 3 - 1 = 50 = 2 \cdot 25, a_1 = 1$

$25 \cdot 3 - 1 = 74 = 2 \cdot 37, a_2 = 1$

$37 \cdot 3 - 1 = 110 = 2 \cdot 55, a_3 = 1$

$55 \cdot 3 - 1 = 164 = 2^2 \cdot 41, a_4 = 2$

$41 \cdot 3 - 1 = 122 = 2 \cdot 61, a_5 = 1$

$61 \cdot 3 - 1 = 182 = 2 \cdot 91, a_6 = 1$

$91 \cdot 3 - 1 = 272 = 2^4 \cdot 17, a_7 = 4$

Таким образом, мы получаем

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\} = \{1, 1, 1, 2, 1, 1, 4\}$$

В соответствии с теоремой для данного A, имеем

$$b = 2^{1+1+1+2+1+1+4} - 3^7 = 2^{11} - 3^7 = -139$$

$x_1 = 2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6} + 3 \cdot 2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} + 3^2 \cdot 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} +$

$3^3 \cdot 2^{a_1+a_2+a_3} + 3^4 \cdot 2^{a_1+a_2} + 3^5 \cdot 2^{a_1} + 3^6 = 2^7 + 3 \cdot 2^6 + 9 \cdot 2^5 + 27 \cdot 2^3 +$

$81 \cdot 2^2 + 243 \cdot 2^1 + 729 = 2363 = 17 \cdot 139$

Продолжая вычислять далее по формуле (7), получим

$x_2 = 3475 = 25 \cdot 139, x_3 = 5143 = 37 \cdot 139, x_4 = 7645 = 55 \cdot 139, x_5 = 5699 = 41 \cdot 139, x_6 = 8479 = 61 \cdot 139, x_7 = 12649 = 91 \cdot 139$

Сокращая $(b, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ на наибольший общий делитель равный 139, получаем для b =-1 первоначальный цикл

$$< 17, 25, 37, 55, 41, 61, 91 >$$

Замечание 1. Список A в теореме - это набор показателей степеней p, которые используются в функции (5) для удаления делителей p на каждом шаге.

Замечание 2. Теорема утверждает, что для любого набора показателей из множества $\mathbb{N}$ можно построить цикл такого же размера, что и набор.

Замечание 3. Из линейности функции (5) относительно n и b следует, что если $< x_1, x_2, ..., x_n >$ цикл для b то и для любого натурального k $< k \cdot x_1, k \cdot x_2, ..., k \cdot x_n >$ является циклом для $k \cdot b$.

Поэтому, для получения нетривиальных циклов с минимальными членами, следует делить b и все $x_1, x_2, ..., x_n$ на НОД$(b, x_1, x_2, ..., x_n)$, если он больше 1.

Замечание 4. b не меняется когда n и сумма $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$ постоянна. Поэтому, любые разбиения s в сумму n слагаемых, могут давать циклы для одного и того же b. Впрочем, это не всегда выполняется, если делить b и все числа x на НОД$(b, x_1, x_2, ..., x_n)$.

Замечание 5. Доказанная теорема в случае простого $p > 2$ может быть расширена на множества A, в которых кроме натуральных чисел допускаются нули, но только когда b и все x_k не делятся на p.

Замечание 6. Для того чтобы в цикле не было повторений нужно чтобы A не состояло из одного и того же набора чисел, повторяющегося несколько раз. Например для $a = 3, p = 2$, если $A = \{1, 2\}$, то цикл $< 5, 7 >$, а если $A = \{1, 2, 1, 2\}$, то цикл (7) тоже будет содержать повторения: $< 5, 7, 5, 7 >$.

В частности, для получения нетривиальных циклов в качестве элементов множества A не стоит брать одни нули или единицы.

4. Программная реализация и примеры

Программа на языке Julia, в соответствии в теоремой реализующая генерацию циклов по заданному списку чисел $list = [a_1, ..., a_n], a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

```
function getCycle(list,a,p)#p - простое, a>1 - натуральное, a%p>0
  next(v) = vcat(v[end],v[1:end-1])

  function fix(v)
    m = minimum(v)
    while v[1]!=m v = next(v) end
    v
  end

  function perm(w)
    v = [w]
    for i in 1:length(w)-1
      w = next(w)
      push!(v, w)
    end
    v
  end

  n = length(list)
  b = big(p)^sum(list)-big(a)^n
  l = Vector{BigInt}()
  for w in perm(list)
    x = big(a)^(n-1)
    for i in 1:n-1
      x+=big(a)^(n-i-1)*big(p)^sum(w[1:i])
    end
    push!(l,x)
  end
  push!(l,b)
  d = gcd(l)
  l = reverse(map(x -> div(x,d),l))
  (l[1], fix(l[2:end]))
end
```

Примеры ее использования. Получаем (b, цикл):

```
julia> getCycle([1,1,1,2,1,1,4],3,2)
(-1, BigInt[17, 25, 37, 55, 41, 61, 91])

julia> getCycle([1, 3],3,2)
(7, BigInt[5, 11])

julia> getCycle([1, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 3],3,2)
(11, BigInt[13, 25, 43, 35, 29, 49, 79, 31])

julia> getCycle([2, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 4, 1, 3],3,2)
(17, BigInt[23, 43, 73, 59, 97, 77, 31, 55, 91, 145, 113, 89, 71, 115, 181, 35, 61, 25])

julia> getCycle([3, 1, 1, 2, 4],3,2)
(19, BigInt[5, 17, 35, 31, 7])

julia> getCycle([2, 1, 1, 1, 2, 1, 5, 2, 4, 2, 1, 3, 1, 9],5,2)
(7, BigInt[1, 3, 11, 31, 81, 103, 261, 41, 53, 17, 23, 61, 39, 101])

julia> getCycle([0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 4, 2, 5],4,3)
(7, BigInt[1, 11, 17, 25, 107, 145, 587, 785, 1049, 467, 625, 2507, 1115, 1489, 5963, 2651, 131, 59])

julia> getCycle([0, 1],4,3)
(-13, BigInt[5, 7])

julia> getCycle([1,1,1,2],4,3)
(-13, BigInt[175, 229, 301, 397])

julia> getCycle([1,2],4,3)
(11, BigInt[7, 13])

julia> getCycle([1,2],5,3)
(1, BigInt[4, 7])

julia> getCycle([1, 1, 1, 3],5,3)
(13, BigInt[34, 61, 106, 181])

julia> getCycle([1,2],7,3)
(-11, BigInt[5, 8])

julia> getCycle([0, 1, 0, 7],7,3)
(10, BigInt[1, 17, 43, 311])

julia> getCycle([1, 1, 1, 5],7,3)
(208, BigInt[29, 137, 389, 977])

julia> getCycle([1, 3],8,3)
(17, BigInt[11, 35])

julia> getCycle([2, 1, 1, 4],8,3)
(493, BigInt[277, 301, 967, 2743])

julia> getCycle([1,2],6,5)
(89, BigInt[11, 31])
```

```
julia> getCycle([0, 3, 1, 0, 2],6,5)
(167, BigInt[73, 121, 893, 221, 1493])

julia> getCycle([1,2],7,5)
(19, BigInt[3, 8])

julia> getCycle([1, 1, 1, 2],7,5)
(181, BigInt[222, 347, 522, 767])

julia> getCycle([1, 1, 1, 2],11,7)
(361, BigInt[510, 853, 1392, 2239])
```

Примеры длинных циклов:

```
a = 3, b = 563, p = 2, длина 215:

A = [2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 5, 5, 1, 4, 4, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 4,
1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 1, 4, 1, 4, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 2,
1, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 7, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2,
7, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 5, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 1, 3,
5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 2, 2, 1,
2, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 8, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 4, 1, 3, 3, 1, 2, 2,
5, 2, 4, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 7, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1,
3, 2, 2, 2, 3, 1, 2, 7]

X = [19, 155, 257, 667, 641, 1243, 1073, 1891, 1559, 655, 79, 25, 319, 95, 53, 361, 823, 379,
425, 919, 415, 113, 451, 479, 125, 469, 985, 1759, 365, 829, 1525, 2569, 4135, 1621, 2713,
4351, 851, 779, 725, 1369, 2335, 473, 991, 221, 613, 1201, 2083, 1703, 709, 1345, 2299, 1865,
3079, 1225, 2119, 865, 1579, 1325, 2269, 3685, 5809, 8995, 6887, 2653, 4261, 6673, 10291,
7859, 6035, 4667, 3641, 5743, 139, 245, 649, 1255, 541, 1093, 1921, 3163, 2513, 4051, 3179,
2525, 4069, 6385, 9859, 7535, 181, 553, 1111, 487, 253, 661, 1273, 2191, 223, 77, 397, 877,
1597, 2677, 4297, 6727, 2593, 4171, 3269, 5185, 8059, 6185, 9559, 3655, 1441, 2443, 1973, 3241,
5143, 1999, 205, 589, 1165, 2029, 3325, 5269, 8185, 12559, 1195, 1037, 1837, 3037, 4837, 7537,
11587, 8831, 1691, 1409, 2395, 1937, 3187, 2531, 2039, 835, 767, 179, 275, 347, 401, 883, 803,
743, 349, 805, 1489, 2515, 2027, 1661, 2773, 4441, 6943, 1337, 2287, 29, 325, 769, 1435, 1217,
2107, 1721, 2863, 143, 31, 41, 343, 199, 145, 499, 515, 527, 67, 191, 71, 97, 427, 461, 973,
1741, 2893, 4621, 7213, 11101, 16933, 25681, 38803, 29243, 22073, 33391, 787, 731, 689, 1315,
1127, 493, 1021, 1813, 3001, 4783, 233, 631, 307, 371, 419, 455, 241, 643, 623]

a = 5, b = 67, p = 2, длина 167:

A = [3, 1, 3, 1, 2, 1, 3, 6, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 4, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 2,
1, 2, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 3,
1, 1, 2, 4, 1, 2, 2, 2, 1, 8, 1, 1, 1, 1, 10, 1, 5, 2, 4, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 4, 2, 1, 3, 1, 7, 3,
2, 1, 5, 3, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 4, 4, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 2, 4, 4,
5, 11, 3, 2, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 4, 1, 1, 4, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 4, 4,
1, 1, 9, 1, 7, 5, 4]

X = [17, 19, 81, 59, 181, 243, 641, 409, 33, 29, 53, 83, 241, 159, 431, 1111, 2811, 7061, 8843, 22141,
27693, 34633, 10827, 27101, 33893, 42383, 105991, 265011, 662561, 414109, 517653, 647083, 1617741,
2022193, 1263879, 3159731, 7899361, 4937109, 6171403, 15428541, 19285693, 24107133, 30133933, 37667433,
11771077, 14713863, 36784691, 91961761, 57476109, 71845153, 44903229, 56129053, 70161333, 87701683,
219254241, 137033909, 171292403, 428231041, 267644409, 41819441, 26137159, 65342931, 163357361,
102098359, 255245931, 638114861, 797643593, 249263627, 623159101, 778948893, 973686133, 1217107683,
3042769241, 59429087, 148572751, 371431911, 928579811, 2321449561, 11335203, 28338041, 4427821, 5534793,
1729627, 4324101, 5405143, 13512891, 33782261, 42227843, 105569641, 32990517, 41238163, 103095441,
```

```
64434659, 161086681, 6292449, 3932789, 4916003, 12290041, 1920321, 1200209, 750139, 1875381, 2344243,
5860641, 3662909, 4578653, 5723333, 7154183, 17885491, 44713761, 27946109, 34932653, 43665833, 13645577,
4264247, 10660651, 26651661, 33314593, 20821629, 26027053, 32533833, 10166827, 25417101, 31771393,
19857129, 6205357, 7756713, 2423977, 757497, 118361, 289, 189, 253, 333, 433, 279, 731, 1861, 2343, 5891,
14761, 4617, 1447, 3651, 9161, 2867, 7201, 4509, 5653, 7083, 17741, 22193, 13879, 34731, 86861, 108593,
67879, 169731, 424361, 132617, 41447, 103651, 259161, 2531, 6361, 249, 41]

a = 5, b = 37, p = 2, длина 101:

A = [1, 2, 1, 3, 3, 2, 2, 1, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1,
5, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 4, 8, 1, 1, 2, 1, 5,
4, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 5, 4, 2, 1, 3, 3, 2, 4, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 4, 7, 5, 1, 1, 7, 3, 3,
3, 4, 4, 3]

X = [109, 291, 373, 951, 599, 379, 483, 613, 1551, 487, 309, 791, 499, 633, 1601, 4021, 10071, 6299, 7883,
9863, 6169, 15441, 38621, 96571, 120723, 150913, 377301, 943271, 589549, 1473891, 1842373, 4605951, 719681,
1799221, 4498071, 2811299, 3514133, 8785351, 5490849, 13727141, 34317871, 10724337, 26810861, 67027171,
83783973, 209459951, 65456237, 163640611, 204550773, 511376951, 319610599, 199756629, 499391591, 312119749,
780299391, 121921781, 304804471, 190502799, 59532127, 1162737, 2906861, 7267171, 9083973, 22709951, 3548431,
1108887, 693059, 866333, 2165851, 2707323, 3384163, 4230213, 10575551, 1652431, 516387, 645493, 1613751,
1008599, 630379, 787983, 246247, 153909, 384791, 240499, 300633, 751601, 1879021, 4697571, 5871973, 14679951,
4587487, 179199, 28001, 70021, 175071, 6839, 4279, 2679, 1679, 527, 167]

a = 4, b = 253, p = 3, длина 95:

A = [0, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 3, 1, 0, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 1,
2, 2, 0, 3, 0, 2, 0, 6, 2, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 2, 0, 2, 1, 3, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 2, 1,
1, 0, 1, 3, 3, 2, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 2, 4, 1, 2, 0, 2, 0, 3, 1, 2, 1, 0, 3, 2, 2]

X = [2617, 10721, 4793, 6475, 26153, 34955, 46691, 62339, 83203, 333065, 148057, 592481, 263353, 1053665,
1404971, 1873379, 277547, 370147, 1480841, 1974539, 877601, 390073, 1560545, 2080811, 924833, 411065, 548171,
730979, 974723, 1299715, 5199113, 2310745, 9243233, 12324395, 5477537, 2434489, 9738209, 1442707, 5771081,
2564953, 10260065, 56297, 25049, 11161, 44897, 59947, 240041, 11857, 47681, 63659, 28321, 113537, 50489, 67403,
9995, 13411, 53897, 71947, 288041, 384139, 1536809, 2049163, 8196905, 3643097, 4857547, 19430441, 25907339,
11514401, 15352619, 20470243, 81881225, 109175051, 16174091, 2396171, 1064993, 1420075, 5680553, 7574155,
30296873, 498715, 1995113, 886745, 43793, 58475, 26017, 104321, 46393, 185825, 27539, 36803, 16385, 21931,
87977, 13043, 5825]
```

Ссылки

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture

[2] Jeffrey C. Lagarias (2010). "The 3x + 1 problem: an overview". https://arxiv.org/pdf/2111.02635

[3] Belaga, Edward G.; Mignotte, Maurice (1998). "Embedding the 3x+1 Conjecture in a 3x+d Context". Experimental Mathematics. 7 (2): 145–151, http://www.emis.de/journals/EM/expmath/volumes/7/7.html