Новые задачи по математике

Георгий Гуляев

22 марта 2024 г.

Здесь приводятся математические задачи, идея для условия или решения которых, была найдена при помощи программирования и исследования на компьютере. Тем не менее, здесь задачи эти предполагают обычное решение при помощи рассуждений и без использования компьютера.

Задача 01. Последовательность состоит из натуральных чисел. Каждое следующее число последовательности получается из предыдущего при помощи операции сложения с реверсным, цифры которого записаны в обратном порядке. Доказать, что если первые три члена последовательности оказались простыми, например,

$$271, 443, 787, ...,$$

то четвертое число всегда будет составным.

Задача 02. Квадрат со стороной $1 < n < 35$ (n - натуральное) разрезали на квадраты меньшего размера с натуральными сторонами. При этом, для некоторого натурального k оказалось k квадратов 1×1, $k-1$ квадратов 2×2 и так далее, 2 квадрата $(k-1) \times (k-1)$ и один квадрат $k \times k$. Найти n и построить разбиение большого квадрата на мелкие на чертеже.

Задача 03. Известно, что кубическое уравнение:

$$x^3 - 35x^2 + 68x = r,$$

где $r > 0$ - действительное число, имеет три вещественных положительных корня. Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, со сторонами равными корням данного уравнения.

Решения

01. Простые числа оканчиваются на цифры: $[1, 3, 7, 9]$. В начале простого числа могут быть любые цифры, кроме 0.

Допустим, что первое число последовательности начинается на цифру a и оканчивается на цифру b, второе - начинается на цифру c и оканчивается на цифру d и третье - начинается на цифру e и оканчивается на цифру f.

Тогда $d = (a + b)\%10$ (d - остаток от деления на 10 суммы $a + b$). Так как второе число простое, то первое должно начинаться на одну из цифр [2,4,6,8].

Рассматривая все 16 комбинаций, нетрудно доказать, что для первого простого числа всегда будет $a = 2, b = 1$, для второго $c = 4, d = 3$ и для третьего $e = [7, 8], f = 7$. Из этого следует, что четвертое число оканчивается на 4 или на 5, то есть составное.

Если $(a, b) = [(2, 3), (4, 1), (6, 9), (8, 7)]$, то $d = 5$ - второе число составное.

Если $(a, b) = [(2, 9), (4, 7), (8, 3)]$, то $c = 1$ и $d = 1$, то есть $f = 2$ - третье число составное.

Если $(a, b) = [(2, 7), (6, 3), (8, 1)]$, то $c = [1, 9], d = 9$ и $f = [0, 8]$ - третье число составное.

Если $(a, b) = [(4, 3), (6, 1)]$, то $c = [7, 8], d = 7$ и $f = [4, 5]$ - третье число составное.

Если $(a, b) = [(4, 9), (6, 7)]$, то $c = 1, d = 3$ и $f = 4$ - третье число составное.

Если $(a, b) = (8, 9)$, то $c = 1, d = 7$, и $f = 8$ - третье число составное.

Остается последний возможный случай: $(a, b) = (2, 1)$, тогда, $c = [3, 4], d = 3$. Если $(c, d) = (3, 3)$, то $f = 6$ - третье число составное.

Таким образом, для того чтобы все три начальные члены последовательности были простыми существует единственная возможность: $(a, b) = (2, 1), (c, d) = (4, 3)$, откуда следует $e = [7, 8], f = 7$ и четвертое число оканчивается на 4 или на 5, то есть всегда будет составным. Что и требовалось доказать.

Замечания к задаче 01.

Начальные последовательности с первыми тремя простыми членами:

```
271, 443, 787, 1574,...
281, 463, 827, 1555,...
21491, 40903, 71807, 142624,...
21991, 41903, 72817, 144644,...
22091, 41113, 72227, 144454,...
22481, 40903, 71807, 142624,...
23081, 41113, 72227, 144454,...
23971, 41903, 72817, 144644,...
24071, 41113, 72227, 144454,...
25951, 41903, 72817, 144644,...
26681, 45343, 79697, 159394,...
26981, 45943, 80897, 160705,...
27271, 44543, 79087, 157184,...
27431, 40903, 71807, 142624,...
27691, 47363, 83737, 157475,...
27791, 47563, 84137, 157285,...
28031, 41113, 72227, 144454,...
28661, 45343, 79697, 159394,...
28921, 41903, 72817, 144644,...
28961, 45943, 80897, 160705,...
29021, 41113, 72227, 144454,...
29191, 48383, 86767, 163535,...
29251, 44543, 79087, 157184,...
29411, 40903, 71807, 142624,...
29671, 47363, 83737, 157475,...
2129891, 4119103, 7138217, 14266534,...
2131991, 4123303, 7156517, 14313034,...
2141791, 4113203, 7136317, 14272634,...
2141891, 4123303, 7156517, 14313034,...
2151791, 4123303, 7156517, 14313034,...
2157091, 4064603, 7129207, 14158424,...
2161591, 4113203, 7136317, 14272634,...
...
```

В таких последовательностях, сколько бы мы их не продолжали, не удается найти других простых чисел, кроме начальных трех. Поэтому сформулируем гипотезу: в любой последовательности, получаемой при помощи операции сложения с реверсным не может быть более трех простых членов.

02. Очевидно, сумма площадей всех квадратов разбиения для выбранного k должна быть равна n^2:

$$S_k = k \cdot 1^2 + (k-1) \cdot 2^2 + (k-2) \cdot 3^2 + ... + 2 \cdot (k-1)^2 + 1 \cdot k^2 = n^2$$

Будем последовательно вычислять S_k (k = 2,3,...) пока $S_k < 35^2 = 1225$.

$S_2 = 6, n = \sqrt{6}$

$S_3 = 20, n = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$

$S_4 = 50, n = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$

$S_5 = 105, n = \sqrt{105}$

$S_6 = 196, n = \sqrt{196} = 14$

$S_7 = 336, n = \sqrt{336} = 4 \cdot \sqrt{21}$

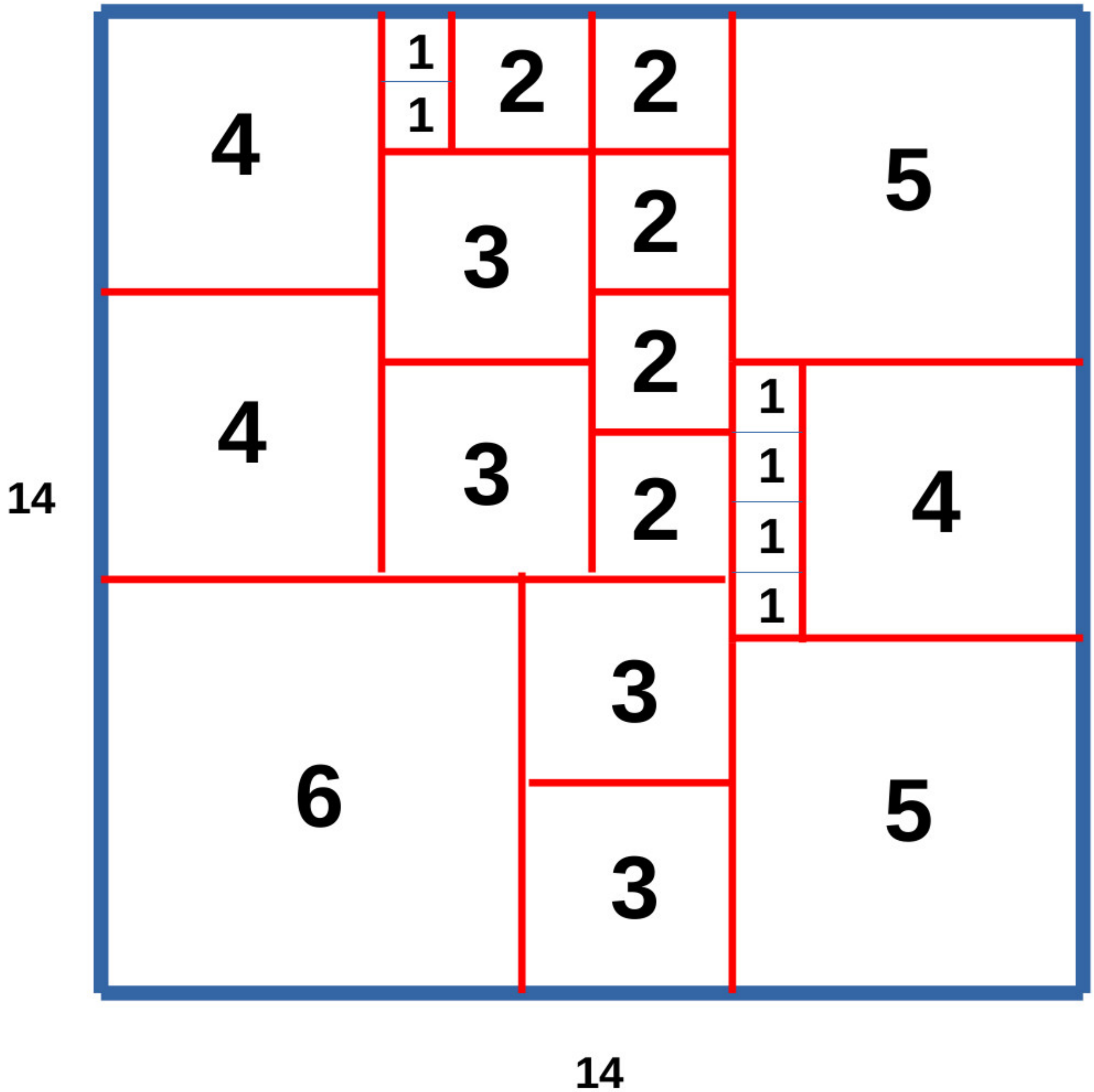
$S_8 = 540, n = \sqrt{540} = 6 \cdot \sqrt{15}$

$S_9 = 825, n = \sqrt{825} = 5 \cdot \sqrt{33}$

$S_{10} = 1210, n = \sqrt{1210} = 11 \cdot \sqrt{10}$

$S_{11} = 1716, n = \sqrt{1716} = 2 \cdot \sqrt{429}$

Таким образом, решение возможно только при $k = 6, n = 14$. Теперь осталось только его построить:



4
1
1
2
2
5
3
2
4
2
1
1
14
3
2
4
1
1
3
6
5
3
14

Замечания к задаче 02.

Сумма S_k является квадратом в следующих случаях (k, n):

```
(k, n)
------
(1, 1)
(6, 14)
(25, 195)
(96, 2716)
(361, 37829)
(1350, 526890)
(5041, 7338631)
(18816, 102213944)
(70225, 1423656585)
...
```

Последовательность $a_n = \{1, 6, 25, 96, 361, 1350, 5041, 18816, 70255, ...\}$ оказалась известной [1]. В частности, там приводится формула:

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 2}{2}, n = 1, 2, ...$$

Вторая последовательность $b_n = \{1, 14, 195, 2716, 37829, ...\}$ также встречается в энциклопедии целых последовательностей [2]. Она может быть задана рекуррентной формулой:

$$b_n = 14 \cdot b_{n-1} - b_{n-2}, b_0 = 0, b_1 = 1, n = 2, 3, 4, ...$$

03. Пусть $a > 0, b > 0, c > 0$ - корни кубического уравнения $x^3 - 35x^2 + 68x = r, d$ величина диагонали параллелепипеда. Тогда, по теореме Виета,

$$a + b + c = 35$$
$$ab + ac + bc = 68$$
$$abc = r$$

Имеем, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 35^2 - 2 \cdot 68 = 1089$. $d = \sqrt{1089} = 33$

Пример $a = 17 + \sqrt{255}, b = 17 - \sqrt{255}, c = 1$ (откуда выводим $r = 34$) доказывает, что такие уравнения есть, то есть задача вполне корректна.

Замечания к задаче 03. Ниже приведены возможные варианты (p, q, d) данной задачи для уравнения $x^3 - p \cdot x^2 + q \cdot x = r$, когда d - натуральное, а p и q в пределах сотни:

```
(p, q, d)
---------
(3, 4, 1),
(4, 6, 2),
(5, 8, 3), (5, 12, 1),
(6, 10, 4), (6, 16, 2),
(7, 12, 5), (7, 20, 3), (7, 24, 1),
(8, 14, 6), (8, 24, 4), (8, 30, 2),
(9, 16, 7), (9, 28, 5), (9, 36, 3), (9, 40, 1),
(10, 18, 8), (10, 32, 6), (10, 42, 4), (10, 48, 2),
(11, 20, 9), (11, 36, 7), (11, 48, 5), (11, 56, 3), (11, 60, 1),
(12, 22, 10), (12, 40, 8), (12, 54, 6), (12, 64, 4), (12, 70, 2),
(13, 24, 11), (13, 44, 9), (13, 60, 7), (13, 72, 5), (13, 80, 3), (13, 84, 1),
(14, 26, 12), (14, 48, 10), (14, 66, 8), (14, 80, 6), (14, 90, 4), (14, 96, 2),
(15, 28, 13), (15, 52, 11), (15, 72, 9), (15, 88, 7), (15, 100, 5),
(16, 30, 14), (16, 56, 12), (16, 78, 10), (16, 96, 8),
(17, 32, 15), (17, 60, 13), (17, 84, 11),
(18, 34, 16), (18, 64, 14), (18, 90, 12),
(19, 36, 17), (19, 68, 15), (19, 96, 13),
(20, 38, 18), (20, 72, 16),
(21, 40, 19), (21, 76, 17),
(22, 42, 20), (22, 80, 18),
(23, 44, 21), (23, 84, 19),
(24, 46, 22), (24, 88, 20),
(25, 48, 23), (25, 92, 21),
(26, 50, 24), (26, 96, 22),
(27, 52, 25), (27, 100, 23),
(28, 54, 26),
(29, 56, 27),
(30, 58, 28),
(31, 60, 29),
(32, 62, 30),
(33, 64, 31),
(34, 66, 32),
```

```
(35, 68, 33),
(36, 70, 34),
(37, 72, 35),
(38, 74, 36),
(39, 76, 37),
(40, 78, 38),
(41, 80, 39),
(42, 82, 40),
(43, 84, 41),
(44, 86, 42),
(45, 88, 43),
(46, 90, 44),
(47, 92, 45),
(48, 94, 46),
(49, 96, 47),
(50, 98, 48),
(51, 100, 49)
```

Ссылки

[1] https://oeis.org/search?q=1%2C6%2C25%2C96%2C361%2C1350&go=Search
[2] https://oeis.org/search?q=1%2C14%2C195%2C2716&go=Search