Любимые задачи по математике

Георгий Гуляев

6 ноября 2023 г.

Введение

Мне хотелось бы вспомнить некоторые задачи, которые во время моего формирования как математика произвели на меня сильное впечатление. Разумеется, они не являются оргинальными. Идеи для них были взяты в разное время из различных книг и других источников.

Начнем с анекдота, имеющего определенное отношение к математике.

Два путешественника летят на воздушном шаре. Им нужно сориентироваться по месту и они решают снизиться и спросить кого-нибудь. Когда, после нескольких попыток, им удалось приблизиться к земле, один из них успевает задать короткий вопрос прохожему: "Где мы находимся?".

Прохожий подумал немного и ответил: "Вы находитесь на воздушном шаре". После этого шар поднялся вверх и они улетели. Летят они дальше и размышляют. Второй путешественник говорит: "Наверное, это был математик". "Почему ты так решил?"– спросил первый. Ну, во-первых, перед тем как ответить он подумал, во-вторых, ответил абсолютно точно, ну а, в третьих, его ответ совершенно бесполезен.

Анекдот в шутливой форме отражает тот факт, что математики ищут и исследуют прежде всего красивые и простые абстрактные закономерности, реальная жизнь, однако, может поставить задачу, для которой в математике нет подходящих абстракций или методов.

Кроме того, какими бы сложными внешне ни казались математические формулы и теоремы, после соответствующих преобразований они сводятся к тавталогии типа $A = A$, то есть как бы в основе своей не несут никакой новой информации.

И, тем не менее, как это ни странно, именно математика является средством, при помощи которого человек формулирует и познает законы природы.

Примерно с 7 класса средней школы я осознал, что я буду математиком. Родился и жил я в довольно отдаленной от цивилизации алтайской деревне, где не было ни математических кружков, ни физ-мат школ, и единственным средством получения информации для меня была сельская библиотека.

В этих условиях я научился получать знания самостоятельно из книг, изучая математику, насколько это было возможно в моих условиях. Особенно мне нравился процесс поиска решения интересных и сложных задач.

Постоянно решая задачи, в том числе и на не очень интересных уроках по другим предметам, к 10-му классу я уже накопил достаточно разных приемов и идей в области элементарной математики.

В качестве примера приведу один эпизод, произошедший на уроке математики в 10 классе. Тема урока: "Решение иррациональных уравнений".

Учительница у доски записывает пример иррационального уравнения, возводит обе части уравнения в квадрат, избавляясь от квадратных корней, получает обычное уравнение без корней и находит его решение.

Наблюдая за этим процессом, я понимаю, что она кое-что упускает, поднимаю руку и предлагаю ей решить следующее уравнение:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2} \tag{1}$$

Учительница на доске решает это уравнение тем же способом:

1. Возводит обе части уравнения в квадрат и выполняет преобразования

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$x+\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x^2-2x+1}+x-\sqrt{2x-1}=2$$

$$2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2$$

2. Извлекает $(x-1)$ из под корня

$$2x + 2(x-1) = 2$$

И получает $4x = 4$, то есть находит единственное решение $x = 1$. Подстановкой в уравнение (1) легко проверяется, что решение подходит.

Дождавшись этого момента, я объявляю ей, что она потеряла бесконечное множество решений исходного уравнения. К чести учителей, надо сказать, что они никогда не обижались на меня за такие "приколы".

Учительница просто сказала, давай после уроков ты мне покажешь, что я здесь потеряла и продолжила запланированное занятие. А после уроков я, действительно, показал ей как нужно решать данное уравнение, чтобы избежать потери корней.

Условия задач

Поскольку задач не так много, они не делятся на простые и сложные и приводятся здесь как бы в случайном порядке.

Задача 01. Найти все решения уравнение (1).

Задача 02. В первом стакане 10 ложек чая, а во втором 10 ложек молока. Ложку молока из второго стакана перелили в первый, затем смесь тщательно перемешали и ложку смеси перелили обратно в первый стакан. Чего оказалось больше: молока в первом стакане или чая во втором? Возможные химические процессы при смешивании жидкостей не учитывать.

Задача 03. Комната имеет форму куба. В одном из углов на потолке сидит паук, а в противоположном углу на полу сидит муха. Паук может ползать по стенам, потолку и полу, то есть по поверхности куба. Муха - не двигается. Как нужно ползти пауку до мухи, чтобы расстояние, которое он проползет было наименьшим?

Задача 04. Двое приятелей-математиков не виделись много лет и, когда они встретились, один сказал другому, что у него уже трое детей.

- Сколько же лет твоим детям? - спросил его товарищ.

- Произведение их лет равно 36, а сумма равна номеру трамвая, который сейчас проезжает мимо нас, - сказал первый из друзей.

Второй посмотрел на трамвай и, после некоторого размышления, сказал, что этих данных недостаточно для того чтобы определить точно возраст каждого ребенка.

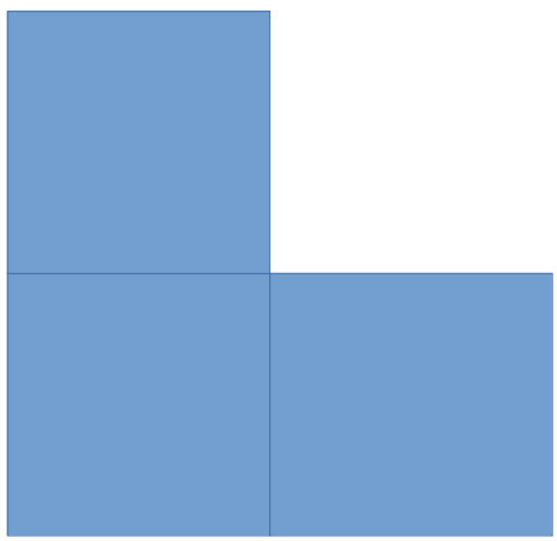
- Да, верно, я совсем забыл сказать, что старший сын у меня рыжий, - добавил первый.

- Ах так! Тогда я могу назвать возраст каждого из твоих детей, - обрадовался второй приятель.

Итак, сколько же лет было каждому ребенку?

Задача 05. Доказать что среди любых 6 человек найдется либо трое попарно знакомых друг с другом, либо трое попарно незнакомых.

Задача 06. Квадрат двумя прямыми, проходящими через его центр параллельно сторонам, разделили на 4 равных квадрата и удалили один квадрат из четырех.

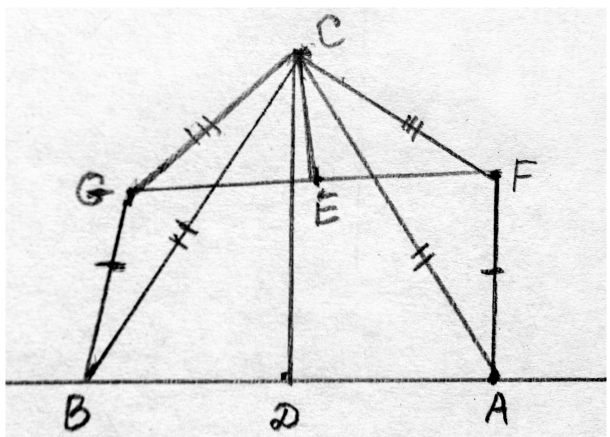


Оставшуюся фигуру разделить на 4 равные части. Под словом "равные"подразумевается, что их можно совместить наложением так, чтобы они полностью совпали.

Задача 07. Из города Барнаула вылетел вертолет. Строго по компасу он пролетел сначала 500 км на север, затем 500 км на восток, далее 500 км на юг и, после этого, 500 км на запад. Где приземлится вертолет по отношению к Барнаулу? Здесь мы абстрагируемся от возможностей современных вертолетов и предполагаем дозаправку в воздухе либо приземление для дозаправки в некоторых точках маршрута.

Задача 08. Разделить окружность на четыре равные части, пользуясь только циркулем (без линейки).

Задача 09. Ваня доказал теорему о том, что прямой угол равен острому, используя следующий нарисованный им чертеж:



Рассуждал он так.

Рассмотрим прямую на плоскости и отметим произвольный отрезок AB на ней. Из точек A и B построим равные отрезки AF и BG так, чтобы угол $\widehat{BAF}$ был прямой, а угол $\widehat{ABG}$ был острый, но близкий к прямому. Концы отрезков F и G соединим между собой.

Далее, найдем точку D - середину отрезка AB и E - середину отрезка FG. Из D и E восстановим перпендикуляры $DC \perp AB$ и $EC \perp FG$. Так как они не параллельны, то пересекутся в некоторой точке C.

Треугольники ACF и BCG равны по трем сторонам, ибо $AF = BG$ по построению, $AC = BC$ так как точка C находится на серединном перпендикуляре к отрезку AB и, поэтому, равноудалена от концов этого отрезка. Аналогично, $FC = GC$ так как точка C находится на серединном перпендикуляре к отрезку FG.

В равных треугольниках против равных сторон находятся равные углы, то есть $\widehat{FAC} = \widehat{GBC}$. Но в равнобедренном треугольнике ABC при основании также равные углы, то есть $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ и, таким образом, углы: прямой $\widehat{BAF}$ и острый $\widehat{ABG}$ равны как суммы равных углов.

Помогите Ване понять, где он ошибся.

Задача 10. Али-Баба пытается проникнуть в пещеру. У входа в нее стоит инопланетное устройство - барабан с четырьмя отверстиями по бокам. Внутри каждого отверстия поставлен переключатель, имеющий два положения, условно говоря, "on"и "off".

Засунув руку в отверстие можно понять в каком положении находится переключатель, а также переключить его в обратное положение или оставить на месте. Дверь открывается, когда все переключатели находятся в одном и том же положении. У инопланетян, вероятно, было по 4 руки, поэтому, засунув в каждое отверстие по руке, они легко открывали дверь с первой попытки.

У Али-Бабы только две руки и он может за раз использовать только два переключателя. После того как руки вынимаются из отверстий барабан приходит в быстрое вращение так, что после его остановки невозможно определить в какие отверстия засовывались руки и какие переключатели трогали в прошлый раз.

У Али-Бабы есть только 5 попыток, после чего дверь окончательно блокируется и открыть ее уже никак невозможно. Сумеет ли Али-Баба попасть в пещеру?

Задача 11. Известно, что квадратное уравнение имеет не более 2 корней. Однако следующее урввнение:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

при $a < b < c$ является квадратным относительно переменной x и имеет три различных корня: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$, в чем легко убедиться простой проверкой. Как это объяснить?

Задача 12. Доказать, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Решения

01. После уроков я продемонстрировал учительнице такое решение уравнения (1).

Исходя из следующих двух равенств,

$$2x + 2\sqrt{2x-1} = 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} + 1 = (\sqrt{2x-1} + 1)^2$$
$$2x - 2\sqrt{2x-1} = 2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1 = (\sqrt{2x-1} - 1)^2$$

после умножения на $\sqrt{2}$ обеих частей уравнения, приводим его к виду

$$\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2} = 2$$

Вот здесь важно не допустить ошибку учительницы и при извлечении корней поставить знак модуля.

$$|\sqrt{2x-1}+1| + |\sqrt{2x-1}-1| = 2$$

Первый знак модуля можно опустить, ибо, очевидно, что $\sqrt{2x-1}+1 > 0$ при всех допустимых значениях x. Таким образом, исходное уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\sqrt{2x-1} + 1 + |\sqrt{2x-1}-1| = 2 \tag{2}$$

Очевидно, $\sqrt{2x-1} - 1 \geq 0$, при $x \geq 1$ и $\sqrt{2x-1} - 1 < 0$, при $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

В первом случае уравнение приводится к $2\sqrt{2x-1} = 2$, откуда получаем решение $x = 1$.

Во втором случае уравнение приводится к тождеству $2 = 2$, то есть любое число из промежутка $\frac{1}{2} \leq x < 1$ является его решением.

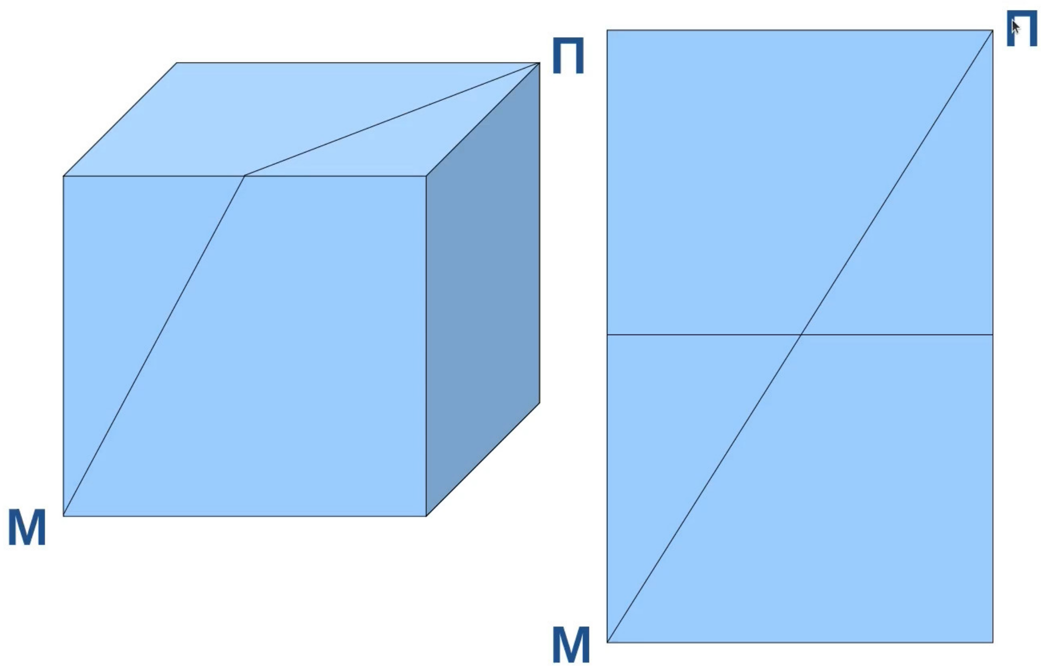
Ответ: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

Решение учительницы также можно было бы исправить, если в заключительной части решения учесть, что $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ и $2x - 1 \geq 0$.

02. Пусть x ложек молока в первом стакане (x - действительное число), тогда $10 - x$ ложек чая в первом стакане, Следовательно, весь остальной чай (x ложек) находится во втором стакане.

Ответ: Одинаково

03. Траектория по которой должен ползти паук отображена на рисунке:



Если развернуть две грани куба на плоскость, то получим прямоугольник, состоящий из двух квадратов, в одном углу которого находится паук, а в другом муха. Кратчайшее расстояние - диагональ этого прямоугольника.

Ответ: По отрезкам прямых через середину противоположного ребра.

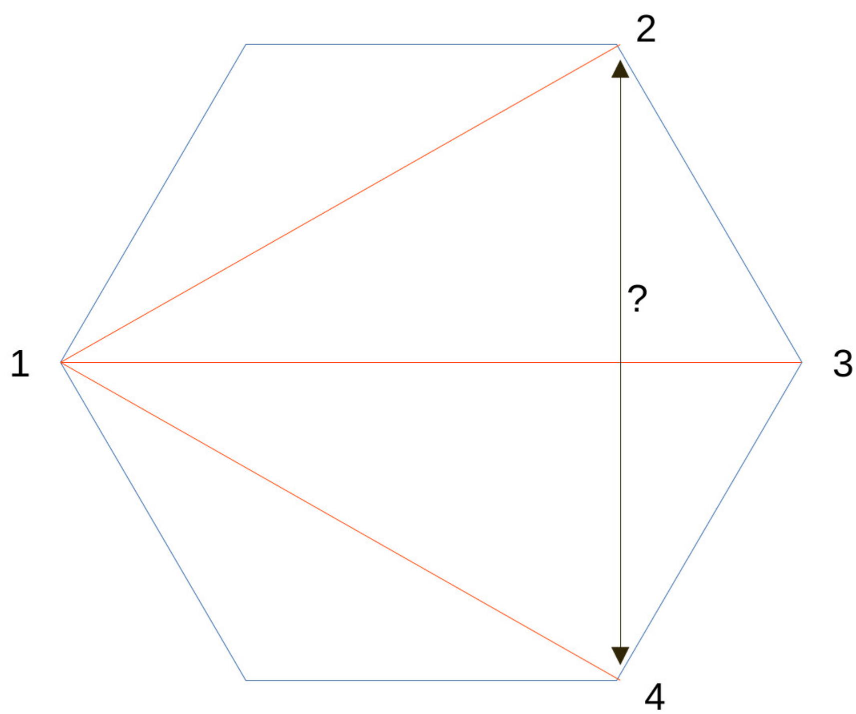
04. Рассмотрим все разложения числа 36 в виде произведения трех сомножителей:

```
36 = 1*1*36 => сумма = 38
36 = 1*2*18 => сумма = 21
36 = 1*3*12 => сумма = 16
36 = 1*4*9 => сумма = 14
36 = 1*6*6 => сумма = 13
36 = 2*2*9 => сумма = 13
36 = 2*3*6 => сумма = 11
36 = 3*3*4 => сумма = 10
```

Номер трамвая 13, поскольку во всех других случаях возраст определяется однозначно. Старший сын один, поэтому ему 9 лет.

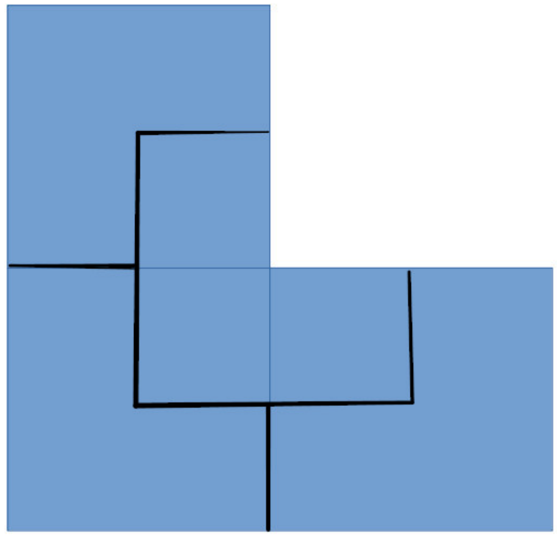
Ответ: 2,2,9

05. Задача равносильна следующей: при раскрашивании сторон и диагоналей правильного шестиугольника в два цвета всегда найдется треугольник, все стороны которого имеют один цвет.

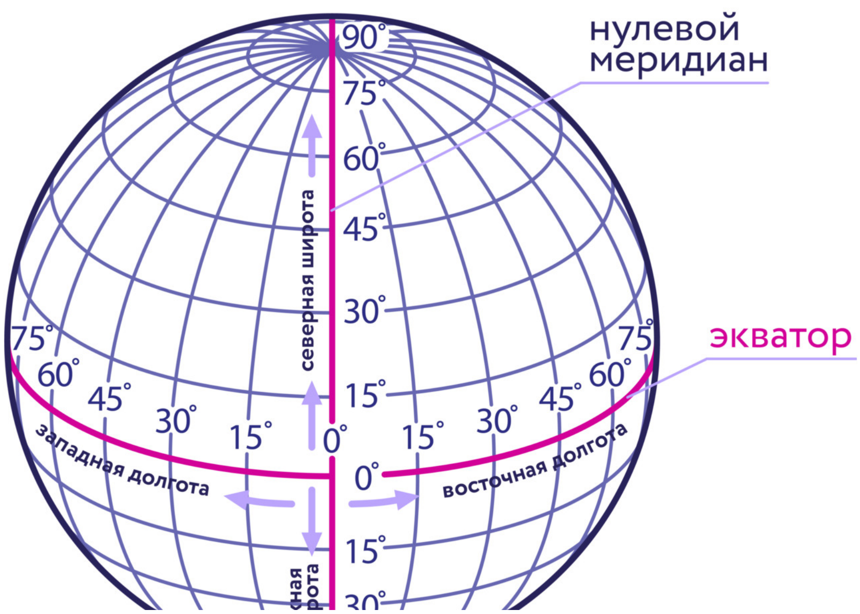


Возьмем любую вершину и обозначим ее 1. При любой раскраске всегда найдется 3 других вершины $(2, 3, 4)$, которые будут соединены с 1 отрезками с одним и тем же цветом (на рисунке красным). Отрезки $[2, 3]$, $[3, 4]$ и $[2, 4]$ не могут быть красными, то есть треугольник $(2, 3, 4)$ будет раскрашен в один цвет.

06. Решение приведено на рисунке ниже. Любопытно, что четыре части фигуры имееют ту же форму, что и сама фигура.



07. Барнаул находится в северном полушарии, на 53 градусе северной широты.



На север и юг будем лететь по меридианам, которые сходятся на северном полюсе, на восток и запад - по параллелям. Поэтому, точка приземления вертолета будет находиться на той же параллели, что и точка взлета, но значительно восточнее.

Для вычисления расстояния между точкой взлета и точкой приземления нужно использовать формулы сферической геометрии.

Ответ: восточнее Барнаула.

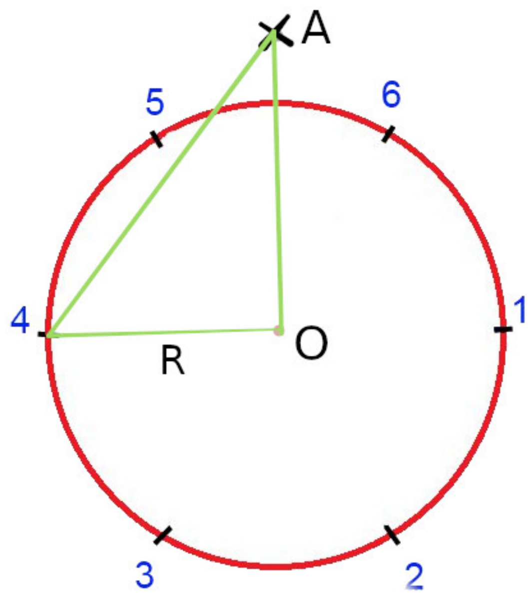
08. Рассмотрим окружность радиуса R. Будем использовать следующие известные формулы для вписанных в нее фигур:

$$a_6 = R, a_3 = R\sqrt{3}, a_4 = R\sqrt{2},$$

где a_3, a_4, a_6 - стороны вписанных в окружность правильного треугольника, квадрата, правильного шестиугольника, соответственно. Очевидно,

$$a_4^2 + a_6^2 = a_3^2$$

Таким образом, для построения a_4 достаточно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой a_3 и катетом a_6, тогда второй катет даст сторону вписанного квадрата, при помощи которой можно разделить окружность на 4 части.



Теперь можно выполнить сам процесс деления окружности на 4 равные части.

1. Делим окружность на 6 частей радиусом окружности (получаем точки 1,2,...,6).

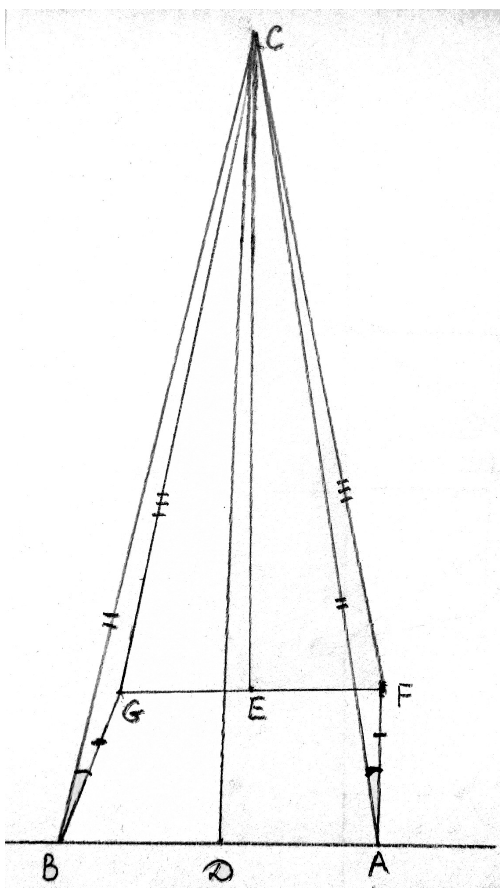
2. Измеряем циркулем сторону правильного треугольника, вписанного в окружность, например 4-6.

3. Из точек 1 и 4 делаем засечки этим расстоянием и получаем точку A.

4. Измеряем циркулем $OA = R\sqrt{2} = a_4$ - сторону квадрата, вписанного в окружность.

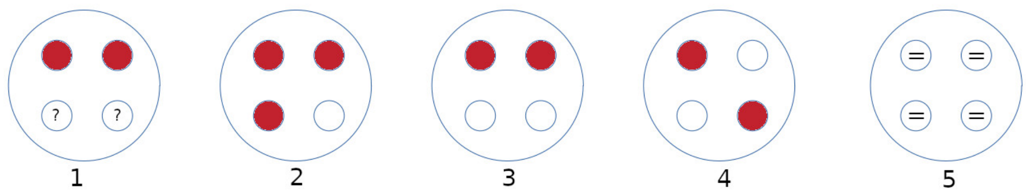
5. Делим окружность на 4 части, полученным расстоянием.

09. Все рассуждения Вани (кроме вывода) правильные, неправильный только чертеж. Вот как мог выглядеть правильный чертеж к задаче:



Треугольники ACF и BCG действительно равны, вот только прямой угол $\widehat{BAF}$ равен сумме $\widehat{CAF}$ и $\widehat{BAC}$, а острый $\widehat{ABG}$ равен разности $\widehat{ABC}$ и $\widehat{CBG}$. Ну, то есть прямой угол равен острому + удвоенный угол $\widehat{CAF}$.

10. На следуещем рисунке показан пошаговый процесс действий, приводящих к отрытию двери в пещеру.



При этом красным отмечено одно положение переключателей, пусть будет включено, а белым - другое (выключено).

На первом шаге мы вставляем руки в два соседних отверстия и приводим их оба к положению включено, то есть те которые выключены переключаем, а те которые включены оставляем как есть. При этом состояние остальных двух переключателей будет нам неизвестно. Если дверь не откроется, то значит хотя бы один из них выключен.

На втором шаге (если дверь не открылась) суем руки в два отверстия по диагонали и включаем еще один переключатель, если он еще не будет включен. Теперь если дверь не откроется, то оставшийся четвертый переключатель точно выключен.

На третьем шаге опять суем руки в два отверстия по диагонали и, если попадется выключенный переключатель, то включаем его и дверь открывается. В случае когда попались оба включенные, выключаем только один из переключателей (неважно какой).

На четвертом шаге вставляем руки в два соседних отверстия и, если попадутся оба включенные или оба выключенные, то переключаем их оба и дверь открывается. В случае когда попались переключатели в разном положении, точно также переключаем их оба в противоположное положение.

Ну и, наконец, на пятом шаге суем руки в два отверстия по диагонали и переключаем оба переключателя в противоположное положение. После этого все переключатели будут в одном и том же положении и дверь откроется.

11. Есть только одно объяснение: данное уравнение является тождеством, то есть оно верно для любого x. В принципе, этого замечания достаточно. но можно его и формально доказать, приводя дроби в левой части к общему знаменателю и раскрывая скобки.

12. Привожу решение из своей толстой тетради, сохранившейся еще со школьных времен:

Решение.

Запишем очевидное неравенство:

(1). $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{98^2}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)<$

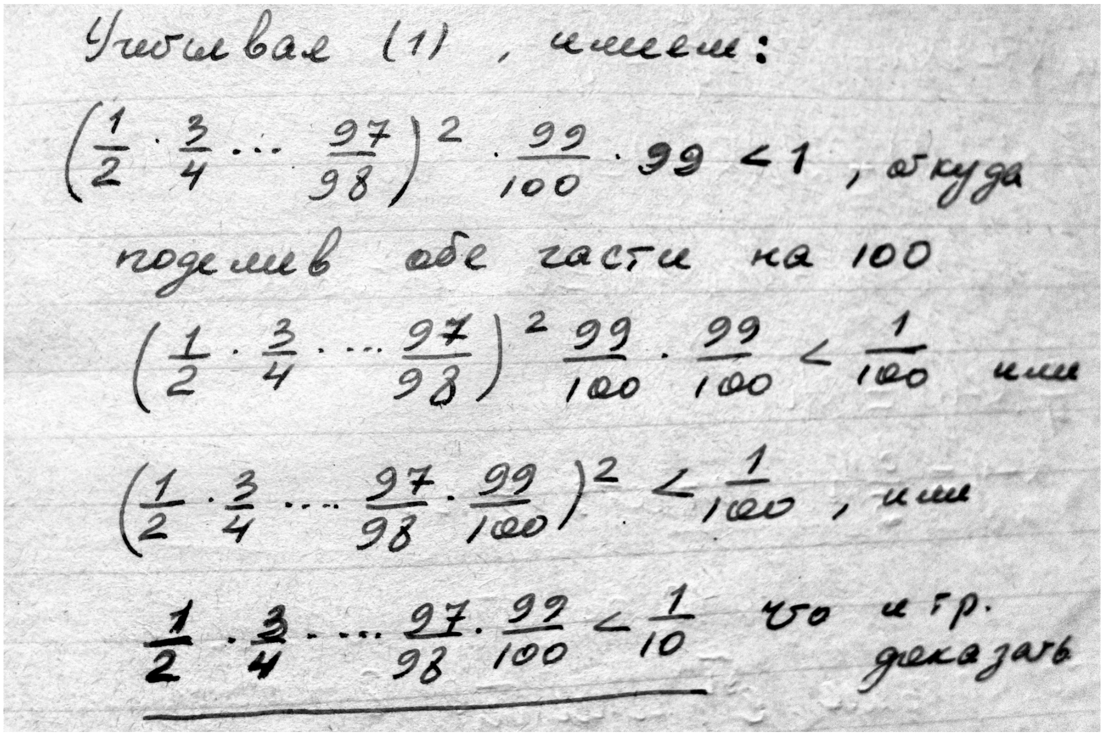
Преобразуем левую часть:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{98^2}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{98}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{98}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{99}{98}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{97}{98}\cdot 99$$



Учитывая (1), имеем:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{97}{98}\right)^2\cdot\frac{99}{100}\cdot 99<1,$$ откуда

поделив обе части на 100

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{97}{98}\right)^2\frac{99}{100}\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{100}$$ или

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100}\right)^2<\frac{1}{100},$$ или

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{97}{98}\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$$ что и тр. доказать

В тетрадке написано, что я решал эту задачу несколько дней.