Гуляев Г.М.

Математика и программирование

Простые числа в выражении ax^2+bx+c

Экспериментальная математика

Порождение простых чисел многочленами

- Простые числа **p** это числа, имеющие только два делителя **1** и **p**. Множество простых чисел бесконечно:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...

- Ведут они себя непредсказуемо, как бы случайно. Найдены закономерности только статистические.

  Пусть $\pi(x)$ - число простых $\leq x \in \mathbb{R}$

  до 10^{12} найдено 37 607 912 018 простых.

  $\pi(10^{12}) = 37\,607\,912\,018$.

  $\pi(x) \approx x/\ln(x)$, $\pi(x) \approx \int_2^\infty (1/\ln(t))dt$ (Гаусс, Чебышев)

- Общую формулу искали все время: $f(x) = p$ для всех x
- Эйлер предложил следующие выражения:

  $2x^2 + 29$, $x^2 + x + 41$, $x^2 - 79x + 1601$

- Легко доказать, что ни один многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами не может иметь простые значения для всех x.

Постановка задачи

- Попробуем найти многочлен ax^2+bx+c во множестве значений которого процент простых чисел больше, чем в многочленах Эйлера.
- Напишем функции на Julia

```
f(x,a,b,c) = a*x^2+b*x+c
count(a,b,c,n) = length(filter(x -> isprime(f(x,a,b,c)),1:n))
```

- Применим их к многочленам Эйлера

```
julia> count(2,0,29,100000) # 27544 для 2x² + 29
julia> count(1,1,41,100000) # 31984 для x² + x + 41
julia> count(1,-79,1601,100000) # 32017 для x² - 79x + 1601
```

Если до 1000000, то получим: 226214, 261080, 261113

- Отметим, что имеется 9592 простых чисел до 100000 и 78498 до 1000000

Решение

- **Вариант 1**

```
function go(d1,d2,d3)
 n = 100000
 for a in d1, b in d2, c in d3
   m = count(a,b,c,n)
   if m>32000
     println((m,a,b,c))
   end
 end
end
```

- **Вариант 2**

```
function go(d1,d2,d3)
  n = 100000
  Threads.@threads for a in d1
    Threads.@threads for b in d2
      Threads.@threads for c in d3
        m = count(a,b,c,n)
        if m>32000
          println((m,a,b,c))
        end
      end
    end
  end
end
```

Параметры и поиск

- **Зададим d1,d2 и d3:**

```
prim(n) = filter(x -> x==0||x==-1||x==1||isprime(abs(x)),-n:n)
d1 = [1,2,8]
d2 = prim(80)     # простые от -80 до 80
d3 = prim(1700) # простые от -1700 до 1700
```

- **Поиск:**

```
julia> go(d1,d2,d3)
```

Результаты

julia> go(d1,d2,d3)

(32017, 1, -79, 1601) # $x^2 - 79x + 1601$ - многочлен Эйлера

(32014, 1, -73, 1373)

(32014, 1, -71, 1301)

(32013, 1, -67, 1163)

(32012, 1, -61, 971)

(32011, 1, -59, 911)

(32008, 1, -53, 743)

(32005, 1, -47, 593)

(32003, 1, -43, 503)

(32003, 1, -41, 461)

(32002, 1, -37, 383)

(34017, 2, 0, -199) # $2x^2 - 199$ - рекорд

(32109, 8, 2, -1097) # $8x^2 + 2x - 1097$

Выводы

- **Преобразуем функцию:**

  $f(x) = 2x^2 - 199 = 2(x^2 - 100) + 1 = 2(x-10)(x+10) + 1$

  $y = x-10 \Rightarrow f(y) = 2y(y + 20) + 1 = 2y^2 + 40y + 1$

- $f(x) = 2x^2 + 40x + 1$

  julia> count(2,40,1,100000) # 34019

n	10^4	10^5	10^6	10^7
π(n)	1229	9592	78498	664579
π(f)	4365	34019	280454	2381771
π(f)/π(n)	3,552	3,547	3,573	3,584

Спасибо за внимание !

www.altailand.ru